

グラフ理論とは

グラフ理論

- いわゆるx軸、Y軸にとらわれない
- 「つながり方」に着目
- 抽象化された「点とそれをむすぶ線」の概念がグラフ

グラフ理論の具体例

- 路線図

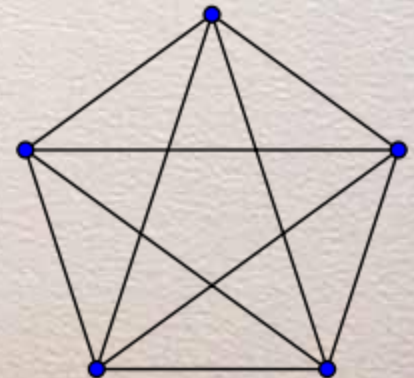
→ 駅と駅のつながり方

- 電気回路

→ 接点がどのようにつながっているか？

- 応用例

→ スモールワールド理論

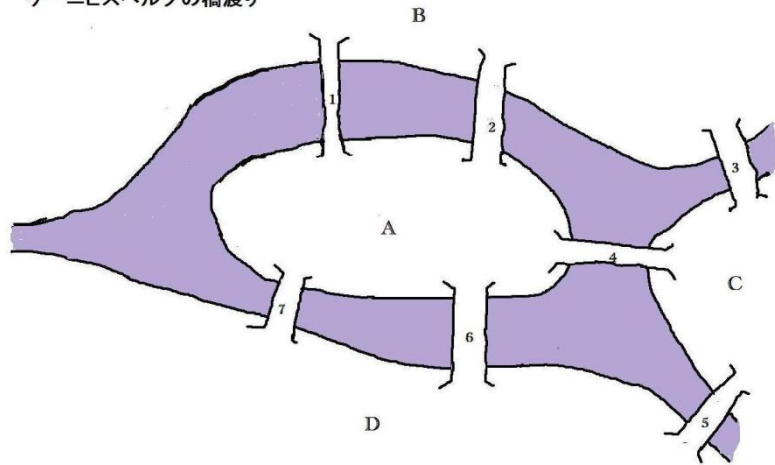


一筆書きと多面体定理

一筆書き

～グラフ理論の始まりは一筆書き～

ケーニヒスベルクの橋渡し



18世紀の初めごろにプロイセン王国の首都であるケーニヒスベルクという大きな町があった。この町の中央には、プレーゲル川という大きな川が流れており、七つの橋が架けられていた。

あるとき町の人々が、次のように言った。「このプレーゲル川に架かっている7つの橋を2度通らずに、全て渡って、元の所に帰ってくる事ができるか。ただし、どこから出発してもよい」

町の人々が言ったことはできるだろうか。

この問題に対し答えを出したのが...



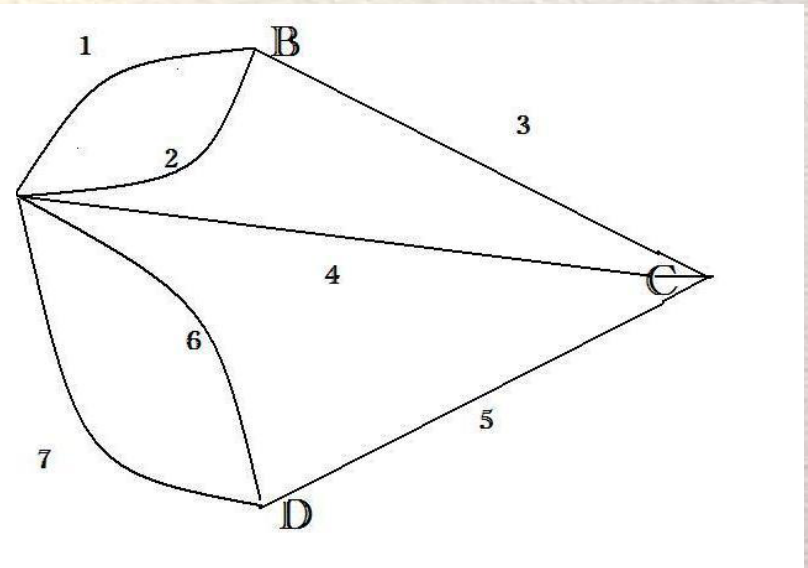
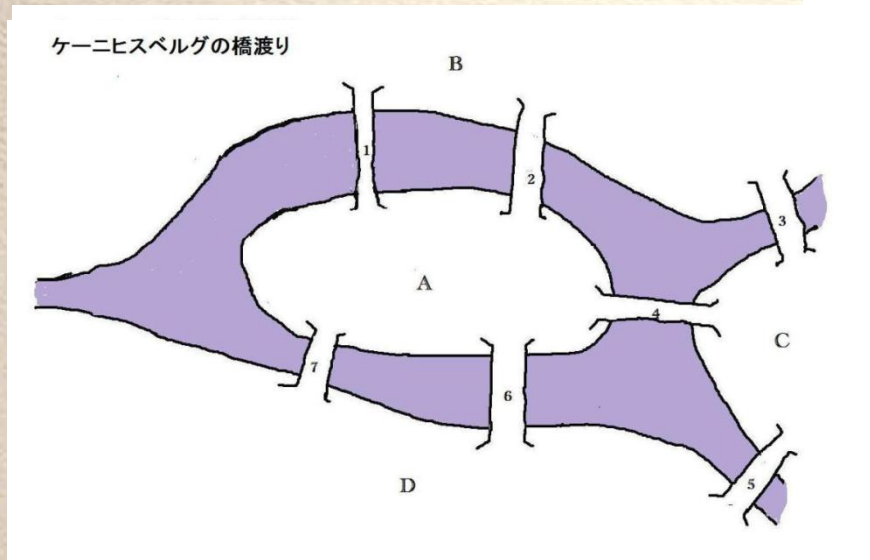
Leonhard

先の町人の言ったことは
できない!!!

では次にその証明方法
を見てみよう!!!

オイラーの証明方法

まず、先ほどの図をグラフ化してみよう



証明は配布するプリントで説明します！

平面グラフに言えること

一般化すると...

$$V(\text{点}) - E(\text{辺}) + F(\text{面}) = 1$$

であることが言えるのだ！！！！

それでは...

先ほどの定理を3次元(立体)に持ち込むと

$$V(\text{点}) - E(\text{辺}) + F(\text{面}) = 2$$

これはオイラーの多面体定理となるのだ！

オイラーの多面体定理

オイラーの多面体定理とは

点と辺と頂点の関係を表した

$$V(\text{点}) - E(\text{辺}) + F(\text{面}) = 2$$

公式のこと

(球と位相同型の多面体については・・・)

多面体定理を実際に試すと...

とある多面体では...

$$V = 50$$

$$E = 120$$

$$F = 72$$

$$V - E + F = 50 - 120 + 72 = 2$$

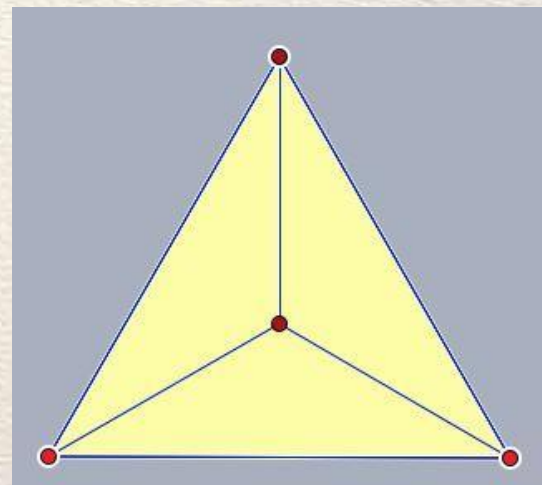
となり、成立

多面体定理を実感しよう

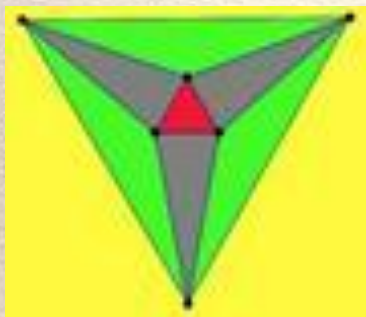
正四面体の平面グラフを利用

$$\begin{aligned} V \text{ (点)} - E \text{ (辺)} + F \text{ (面)} \\ = 4 - 6 + 4 \\ = 2 \end{aligned}$$

で成立することがわかる。



他の正多面体についても...



正八面体

$$6 - 12 + 8 = 2$$



正二十面体

正十二面体

$$20 - 30 + 12 = 2$$

$$12 - 30 + 20 = 2$$

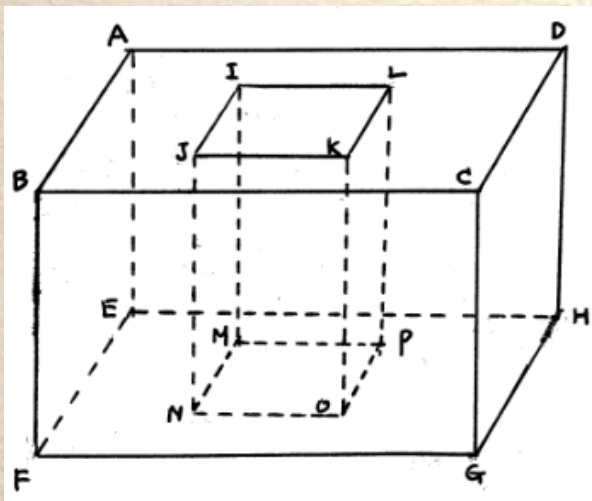


多面体定理の拡張

球と位相同型ではない多面体について

$$V(\text{点}) - E(\text{辺}) + F(\text{面}) = 2 - 2G$$

(G : 穴の数)



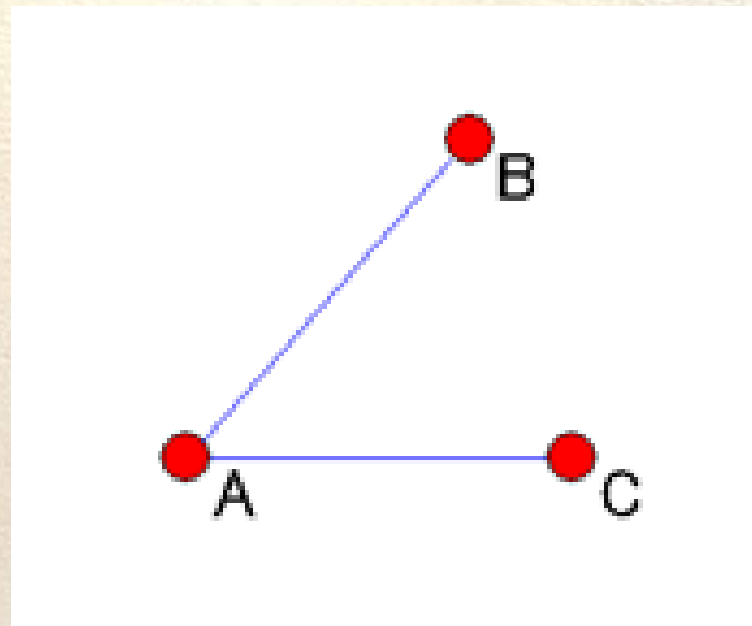
図形

http://www.kaijo.ed.jp/education/subjects/mathematics/pdf/2012summer_5Kawasaki.pdfより

グラフ理論のネットワーク 分析への応用

—ノード、リンク（タイ）でみる関
係性—

ノードとリンク



"It's a small world."

疑問： 私たちは世界中の人々と何人を介してつながっているのか？

例えば、自分のクラスメイトが偶然に自分の小学校時代の友人と知り合いであったことを発見した。これは単なる偶然なのか、それとも、そこには何らかの法則がありえるのか。

⇒ 私たちの世界はどれくらい「大きい」のか？

トラバースとミルグラムの実験 (1967年)

アメリカ中西部在住のAさん(仮)をランダムに選び出し、Aさんとまったく面識のないアメリカ東部ボストン在住のZさん(仮)を探すことを命じた

＜条件と内容＞

- AにはZさんのファーストネームだけを教えた
- ZにはAを知っていそうな友人(Bさん)に手紙をだしてもらおう
- もし、BがAさんを知らなければ同様に知っていそうな友人に手紙をだしてもらおう
- この作業を続け、Aに手紙が届くまでに何人の仲介者が必要かを調査した

(同様の実験を何度か行った)

実験結果

平均して**6人**を仲介するだけで全く面識のない人でも手紙が届くという結果が得られ...

(→ 平均頂点間距離 = 6)



"It's a small world."という表現がされると同時に、

社会にひとがつながる法則があるのでは？
という疑問に...

平均頂点間距離とは？

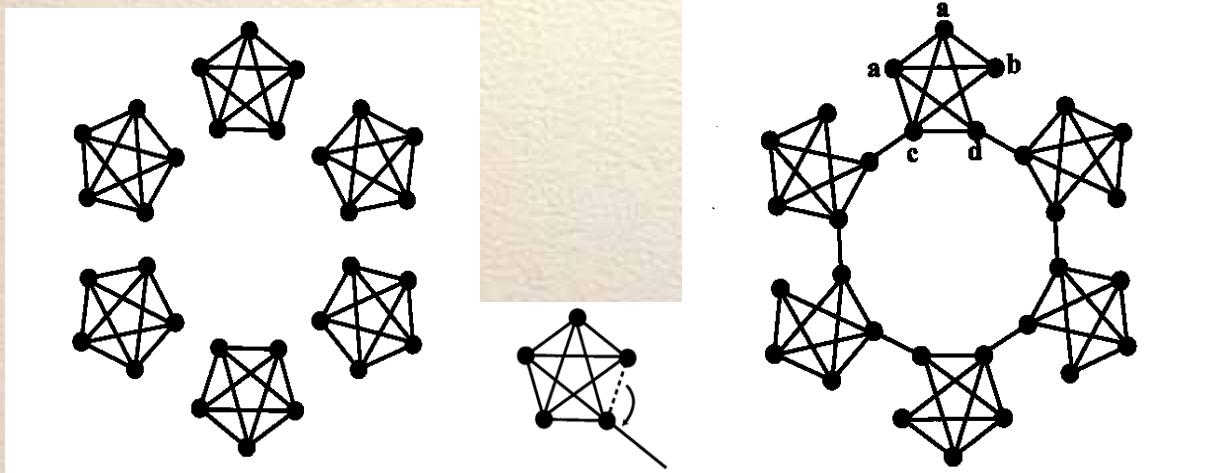
1. 数学的にみた"Small World"

2. "Small World"の理論的 証明の一例

Strogatz & Watts model

SW Model (1998)

ひとつの答え: 高いローカルなクラスタリングを短いリンクが繋ぐことでスモールワールド現象が起きる



計算式

$$Q = \frac{C_{act}}{C_{ran}} / \frac{L_{act}}{L_{ran}} \quad Q > 1.0$$

※“C”:クラスタリング係数

…ネットワークの部分グラフのクラスタの密度

(N個のノードが存在するネットワークの部分グラフにおいて、理論値としてのトライアドの数に対する実際のトライアドの数)

Smallworlds

Network	N	N	<K>	average path length		Clustering coefficient		small-world quotient
	# of nodes	# of nodes in component	average degree	L actual	L random	C actual	C random	actual-to-random ratio for clustering/length
<u>bipartite</u>								
Hollywood film actors network (bipartite)	212,250	u.k.	28.78	3.65	2.99	0.79	0.001	2396.9
American corporate director interlock (1999)	5,311	4,538	16.00	4.33	3.06	0.87	0.003	183.03
German firms, connected	538	291	u.k.	5.46	3.01	0.84	0.022	22.46
German owners, connected	429	u.k.	u.k.	6.09	5.16	0.83	0.008	100.48
<u>unipartite</u>								
C. Elegans network	u.k.	282	14	2.65	2.25	0.28	0.050	4.75
Power grid network	u.k.	4,941	2.7	18.70	12.40	0.08	0.005	10.61
Ohta interfirm networks	8,347	4,500	2.3849 (Sym.)	8.86	9.77	0.0000517	0.00053	0.107

ネットワーク・グラフから読み取る意味

1. 効率が良い情報伝達システム

ローカルな部分で高いクラスタリング係数を

もついくつものクラスターが短い距離でつながり、

巨大なコンポーネント—直接あるいは間接的にすべてのノードが繋がっているネットワーク—を作っている

2. 「複雑ネットワーク」研究の基礎概念の一つ となった

クラスターをリンクでつなぎできる巨大なコンポーネントが存在すれば、SWモデルに合うか検証が可能

参考文献

- 池田謙一編 2010年 『クチコミとネットワークの社会心理』東京大学出版会
- Milgram, Stanley. 1967. "The Small World Problem." *Psychology Today* 2:60-7.
- Watts, Duncan J. 1999. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton, NJ: Princeton University Press.